

わく組の振動を近似する系について

平野 芳太郎

工学部機械工学科

1. ま え が き

多数の一樣断面棒を接続した系の振動は、変位として伸縮、ねじり、曲げ変形によるものを考え、各単位系の変位を支配する運動方程式の解を接続して解く連成問題となる。高橋はこの連成系の微分方程式の解を境界条件と連続条件から決定するかわりに、未定境界値であらわされたラグランジュアンを極小にする条件から、境界値と振動数を定める方法を提案した^{(1), (2)}。この方法により多くの問題がとかれて^{(3), (4), (6)}。そのさい、細長比が十分大きいならば、振動数方程式の数値解を求めるとき、ある種の近似がおこなわれる。この力学的意味がかならずしもあきらかでなく、しばしば質問にであう点である。本文はその近似の意味をあきらかにし、対応する力学系を求めたもので、上記の質問に対する解答のまとめでもある。

2. 記 号

添字 n は n 番目の棒をあらわす。

x, y, z : 直交座標系 (図1参照)

u, v, w, ϕ : 縦, 曲げ, ねじり変位 (図1参照)

ES, EI, EI', C : 縦, 曲げ, ねじり剛性

γS : 単位長さ当りの重量

I_p : 断面二次極モーメント

l : 棒の長さ

ω : 円振動数

$\zeta, \alpha, \alpha', \beta$: 無次元振動数 (式(9)参照)

s : 細長比

$L_t, L, L_u, L_v, L_w, L_\phi$: ラグランジュアン

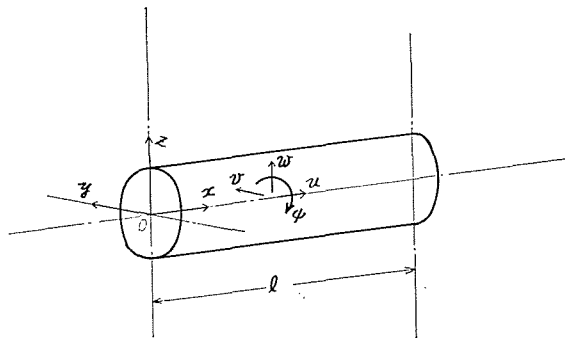


図1 座標系と変位

x : 中心軸, y, z : 断面主軸

3. 棒のラグランジュアン

高橋は棒の両端の境界値を定数として、運動方程式をみたす変位をあらわし、それから棒のラグランジュアンを求めた⁽¹⁾。はじめにその棒のラグランジュアンを示すが、記号などは文献(2)のそれとほとんど同じものを使用している。

接続系の n 番目の棒〔棒(n)と呼ぶことにする〕の軸方向の伸縮によるラグランジュアンは次式である。

$$L_{u_n} = -\frac{1}{2} E_n S_n \frac{\zeta_n}{l_n \sin \zeta_n} \left[\{u_n(0)^2 + u_n(l_n)^2\} \cos \zeta_n - 2 u_n(0) u_n(l_n) \right] \quad (1)$$

また、変位 $u_n(x_n)$ は次式であたえられる。

$$u_n(x_n) = \frac{u_n(l_n) - u_n(0) \cos \zeta_n}{\sin \zeta_n} \sin \frac{\zeta_n}{l_n} x_n + u_n(0) \cos \frac{\zeta_n}{l_n} x_n \quad (2)$$

曲げ変形によるラグランジュアンは、横断面の直交する両主軸方向への変位 $v_n(x_n)$, $w_n(x_n)$ に分解してあらわされ、

$$\begin{aligned} L_{v_n} = & -\frac{1}{2} E_n I_n \left(\frac{\alpha_n}{l_n} \right)^3 \left[\{v_n(0)^2 + v_n(l_n)^2\} p_n + \left(\frac{l_n}{\alpha_n} \right)^2 \left(\frac{dv_n(0)}{dx_n} \right)^2 + \left(\frac{dv_n(l_n)}{dx_n} \right)^2 \right] q_n \\ & + 2 \frac{l_n}{\alpha_n} \left\{ v_n(0) \frac{dv_n(0)}{dx_n} - v_n(l_n) \frac{dv_n(l_n)}{dx_n} \right\} r_n \\ & + 2 \frac{l_n}{\alpha_n} \left\{ v_n(l_n) \frac{dv_n(0)}{dx_n} - v_n(0) \frac{dv_n(l_n)}{dx_n} \right\} t_n \\ & + 2 v_n(0) v_n(l_n) p_{1n} + 2 \left(\frac{l_n}{\alpha_n} \right)^2 \frac{dv_n(0)}{dx_n} \frac{dv_n(l_n)}{dx_n} q_{1n} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} L_{w_n} = & -\frac{1}{2} E_n I_n' \left(\frac{\alpha_n'}{l_n'} \right)^3 \left[\{w_n(0)^2 + w_n(l_n')^2\} p_n' \right. \\ & \left. + \left(\frac{l_n'}{\alpha_n'} \right)^2 \left\{ \left(\frac{dw_n(0)}{dx_n} \right)^2 + \left(\frac{dw_n(l_n')}{dx_n} \right)^2 \right\} q_n' \right. \\ & + 2 \frac{l_n'}{\alpha_n'} \left\{ w_n(0) \frac{dw_n(0)}{dx_n} - w_n(l_n') \frac{dw_n(l_n')}{dx_n} \right\} r_n' \\ & + 2 \frac{l_n'}{\alpha_n'} \left\{ w_n(l_n') \frac{dw_n(0)}{dx_n} - w_n(0) \frac{dw_n(l_n')}{dx_n} \right\} t_n' \\ & \left. + 2 w_n(0) w_n(l_n') p_{1n}' + 2 \left(\frac{l_n'}{\alpha_n'} \right)^2 \frac{dw_n(0)}{dx_n} \frac{dw_n(l_n')}{dx_n} q_{1n}' \right] \end{aligned} \quad (3)'$$

となる。ただし

$$\left. \begin{aligned} p_n &= \frac{\sin \alpha_n \cosh \alpha_n + \cos \alpha_n \sinh \alpha_n}{1 - \cos \alpha_n \cosh \alpha_n}, & q_n &= \frac{\sin \alpha_n \cosh \alpha_n - \cos \alpha_n \sinh \alpha_n}{1 - \cos \alpha_n \cosh \alpha_n}, \\ r_n &= \frac{\sin \alpha_n \sinh \alpha_n}{1 - \cos \alpha_n \cosh \alpha_n}, & t_n &= \frac{\cos \alpha_n - \cosh \alpha_n}{1 - \cos \alpha_n \cosh \alpha_n}, \\ p_{1n} &= \frac{-(\sin \alpha_n + \sinh \alpha_n)}{1 - \cos \alpha_n \cosh \alpha_n}, & q_{1n} &= \frac{-(\sin \alpha_n - \sinh \alpha_n)}{1 - \cos \alpha_n \cosh \alpha_n}, \\ p_n', q_n', r_n', t_n', p_{1n}', q_{1n}' & \text{は } p_n, q_n, r_n, t_n, p_{1n}, q_{1n} \text{ において } \alpha_n \text{ を } \alpha_n' \text{ におきかえる。} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

また、変位 $v_n(x_n)$ は次式で示される。^{(1), (2)}

$$\begin{aligned} v_n = & b_{n1} \left(\sin \frac{\alpha_n}{l_n} x_n + \sinh \frac{\alpha_n}{l_n} x_n \right) + b_{n2} \left(\sin \frac{\alpha_n}{l_n} x_n - \sinh \frac{\alpha_n}{l_n} x_n \right) \\ & + b_{n3} \left(\cos \frac{\alpha_n}{l_n} x_n + \cosh \frac{\alpha_n}{l_n} x_n \right) + b_{n4} \left(\cos \frac{\alpha_n}{l_n} x_n - \cosh \frac{\alpha_n}{l_n} x_n \right) \end{aligned} \quad (5)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} b_{n1} &= \frac{l_n}{2\alpha_n} \frac{dv_n(0)}{dx_n}, & b_{n3} &= \frac{1}{2} v_n(0), \\ b_{n2} &= -\frac{1}{2} p_n v_n(0) - \frac{1}{2} \frac{l_n}{\alpha_n} r_n \frac{dv_n(0)}{dx_n} - \frac{1}{2} p_{1n} v_n(l_n) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{l_n}{\alpha_n} t_n \frac{dv_n(l_n)}{dx_n} \\ b_{n4} &= \frac{1}{2} r_n v_n(0) + \frac{1}{2} \frac{l_n}{\alpha_n} q_n \frac{dv_n(0)}{dx_n} + \frac{1}{2} t_n v_n(l_n) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{l_n}{\alpha_n} q_{1n} \frac{dv_n(l_n)}{dx_n} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

変位 $w_n(x_n)$ についても $v_n(x_n)$ と同様な式で示される。⁽²⁾

ねじり変形によるラグランジュアンは

$$L_{\psi n} = -\frac{1}{2} C_n \frac{\beta_n}{l_n \sin \beta_n} \left[\{\psi_n(0)^2 + \psi_n(l_n)^2\} \cos \beta_n - 2 \psi_n(0) \psi_n(l_n) \right] \quad (7)$$

また、変位 $\phi_n(x_n)$ は

$$\phi_n(x_n) = \frac{\psi_n(l_n) - \psi_n(0) \cos \beta_n}{\sin \beta_n} \sin \frac{\beta_n}{l_n} x_n + \psi_n(0) \cos \frac{\beta_n}{l_n} x_n \quad (8)$$

であたえられる。なお、無次元振動数 ζ_n , α_n , α'_n , β_n は次式で示される。

$$\left. \begin{aligned} \zeta_n^2 &= \frac{\gamma_n S_n l_n^2}{g S_n E_n} \omega^2 & \alpha_n^4 &= \frac{\gamma_n S_n l_n^4}{g E_n I_n} \omega^2 \\ \alpha_n'^4 &= \frac{\gamma_n S_n l_n^4}{g E_n I_n'} \omega^2 & \beta_n^2 &= \frac{\gamma_n I_{pn} l_n^2}{g C_n} \omega^2 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

棒 (n) の総計のラグランジュアン L_n は

$$L_n = L_{un} + L_{vn} + L_{wn} + L_{\psi n}$$

接続系全体のラグランジュアン L_t は

$$L_t = \sum_n L_n$$

であたえられる。

接続系のある部材の剛性が、他の部材にくらべて非常に大きいときは、この部材を近似的に剛体とみなしてよい。このときのラグランジュアンはひずみエネルギーの項が消失して運動エネルギーの項のみとなるが、前記の諸式から、極限として容易に求まるはずである。つぎにこれを示す。

棒を指定する添字 n は特に必要がなければ省略し、境界値を示す記号を次のように変

更する。

$$u(0)=u_0, \quad u(l)=u_l, \quad v(0)=v_0, \quad \dots, \quad \phi(0)=\phi_0, \quad \phi(l)=\phi_l,$$

$$\frac{dv(0)}{dx}=v_0', \quad \frac{dv(l)}{dx}=v_l', \quad \frac{dw(0)}{dx}=w_0', \quad \frac{dw(l)}{dx}=w_l'$$

棒の剛性が大きく、これを剛体とみなすことは、 ES , EI , EI' , C を無限大と考えることであるから、式 (9) から無次元振動数 ζ , α , α' , β が無限小とみされる。

変位 $u(x)$ の式 (2) において $\zeta \rightarrow 0$ とすると

$$u = u_0 = u_l$$

となり、軸方向への一様な変位 u_0 を示し、剛体の変位に対応している。ラグランジュアンは式 (1) において、

$ES \rightarrow \infty$, $\zeta \rightarrow 0$ の極限を求め、

$$\begin{aligned} L_u &= -\frac{1}{2} ES \frac{1}{l} \cdot 2u_0^2 \left(-\frac{1}{2} \zeta^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} ES \frac{1}{l} \frac{rSl^2}{gES} \omega^2 u_0^2 = \frac{1}{2} \frac{rSl}{g} \omega^2 u_0^2 \end{aligned}$$

となる。これは棒がその軸方向に剛体として $u_0 \cos \omega t$ で振動するときの運動エネルギーの最大値に相当する。

式 (8) のねじり変位は $\beta \rightarrow 0$ とすると

$$\phi = \phi_0 = \phi_l$$

となり、中心軸まわりの一様な回転変位を示す。式 (7) の L_ϕ の極限は、 L_u と同様にして求まり

$$L_\phi = \frac{1}{2} \frac{rI_p l}{g} \omega^2 \phi_0^2$$

となる。これは棒が中心軸まわりに剛体として $\phi_0 \cos \omega t$ で回転振動するときの最大運動エネルギーを示す。

つぎに、変位 $v(x)$ は式 (5) において $\alpha \rightarrow 0$ とすると

$$v = 2b_3 = v_0 = v_l$$

となる。したがって、

$$\frac{dv}{dx} = v_0' = v_l' = 0$$

となる。変位 $w(x)$ についても $\alpha' \rightarrow 0$ として同様に、

$$w = w_0 = w_l \quad dw/dx = w_0' = w_l' = 0$$

が求まる。これは棒の横方向への一様な変位を示すのみで、棒の重心まわりの回転変位があらわれない、これは式 (5) の変位が、横断面のその面内の軸まわりの回転慣性を無視した運動方程式の解として求まるため、式 (3), (4) のラグランジュアンにも当然、断面の回転による運動のエネルギーはふくまれていない。式 (3), (4) からこの場合の極限を求めると、

$$L_v + L_w = \frac{1}{2} \frac{rSl}{g} \omega^2 (v_0^2 + w_0^2)$$

となり、横方向に一樣に $\sqrt{v_0^2 + w_0^2} \cos \omega t$ で運動する場合の最大運動エネルギーに相当する。

棒の両端の横方向への変位が比較的大きく、くいちがって運動する系では、回転慣性を無視している式 (3), (4) のラグランジュアンは適切でない。剛性が大きくて剛体とみなす場合も、状況によっては $L_v + L_w$ として適切な運動エネルギーをあたえることが必要である。

4 細長比が十分大きいときの近似系

直線棒を接続した系の低次の規準振動を考え、すべての棒 (n) の振動形が 3 次以下とすると、その無次元振動数 α_n は両端固定棒の振動数 10.996 をこえない。式 (9) から無次元振動数 β_n , ζ_n は α_n と次の関係にある。

$$\beta_n^2 = \frac{E_n I_p n}{C_n} \frac{\alpha_n^4}{s_n^2}, \quad \zeta_n^2 = \frac{\alpha_n^4}{s_n^2} \quad (10)$$

したがって、細長比 s_n が十分大きいとき β_n , ζ_n は α_n に比して小さい。 α_n があまり大きくなく、たとえば、10 以下ならば細長比 s_n が 500 ぐらい、5 以下ならば s_n が 200 以上で、 β_n , ζ_n は 1 より小さく、 $\sin \beta_n$, $\cos \beta_n$, $\sin \zeta_n$, $\cos \zeta_n$ の展開式で β_n^3 , ζ_n^3 以上の項を無視しても実用上さしつかえない。

このような場合の棒のラグランジュアン $L_{\phi n}$, $L_{u n}$ を調べてみる。添字 n は必要がないから省略する。式 (7) において

$$\sin \beta = \beta, \quad \cos \beta = 1 - \frac{1}{2} \beta^2$$

とおき、境界定数を ϕ_0 , ϕ_l にあらためると

$$\begin{aligned} L_{\phi} &= -\frac{1}{2} C \frac{1}{l} \left[(\phi_0^2 + \phi_l^2) \left(1 - \frac{1}{2} \beta^2 \right) - 2 \phi_0 \phi_l \right] \\ &= -\frac{1}{2} Cl \left(\frac{\phi_l - \phi_0}{l} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{C}{l} (\phi_0^2 + \phi_l^2) \cdot \frac{1}{2} \beta^2 \\ &= -\frac{1}{2} Cl \left(\frac{\phi_l - \phi_0}{l} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{r I_p l}{g} \omega^2 \left(\frac{\phi_0^2 + \phi_l^2}{2} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

となる。この第 1 項は一樣なねじり変形

$$\bar{\phi} = \phi_0 + \frac{\phi_l - \phi_0}{l} x \quad (12)$$

をうける場合のひずみエネルギーに相当する。第 2 項は運動エネルギーに相当する項であるが、 $\bar{\phi} \cos \omega t$ で振動するときの最大運動エネルギーにくらべ $\frac{1}{12} \frac{r I_p l}{g} \omega^2 (\phi_l - \phi_0)^2$ だけ大きい。しかしこの項は細長比が十分大きい場合無視している。これを示すため

$L_\psi/EI \left(\frac{\alpha}{l}\right)^3$ をつくと式 (11) から次のようになる。

$$L_\psi/EI \left(\frac{\alpha}{l}\right)^3 = -\frac{1}{2} \frac{C}{EI} \frac{1}{\alpha} \left[\frac{l}{\alpha} (\phi_0 - \phi_l) \right]^2 + \frac{1}{2} \frac{\alpha^3}{s^2} \frac{I_p}{I} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{l}{\alpha} \right)^2 (\phi_0^2 + \phi_l^2) \right] \quad (11)'$$

角変位を表わす境界値定数を $\frac{l}{\alpha} \phi_0$, $\frac{l}{\alpha} \phi_l$, $\frac{l}{\alpha} v_0'$, $\frac{l}{\alpha} v_l'$ のように l/α を乗じたものを用いると、式 (11)' の第2項の境界値の係数は、その第1項および曲げのラグランジュアン $L_v/EI \left(\frac{\alpha}{l}\right)^3$ の各項の境界値の係数に比べ、 $1/s^2$ をふくむから、細長比 s が十分大きければ無視できる。

このように L_ψ として式 (11) の第1項のみを用いることは、いままで、振動数方程式の数値解においてねじり振動の項を細長比無限大として簡略化したことと同等であり、力学的には、運動のエネルギーを無視して一様なねじり変形のひずみエネルギーのみを考えるのであるから、ねじり振動をねじり変形に対し一様な抵抗をもった線形ばねに対する振動としてあつかうことを意味する。

縦振動のラグランジュアン L_u については L_ψ より複雑な考察が必要である。式 (1) を変形して、

$$L_u = -\frac{1}{2} EI \left(\frac{\alpha}{l}\right)^3 \kappa \left[(u_0^2 + u_l^2) \cos \zeta - 2 u_0 u_l \right] \quad (1)'$$

ただし、

$$\kappa = s^2 \frac{\zeta}{\alpha^3 \sin \zeta} \quad (13)$$

とする。

細長比 s が十分に大きければ κ は非常に大きくなる。したがって、式 (1)' から、 u_0 , u_l に特別な制限がなく、 L_u が L_v , L_w , L_ψ にくらべて非常に大きくなるとすれば、縦振動項の貢献が大きく、無次元縦振動数 ζ に応じて定まる α が大きくなり、低次の振動形に対応しない。それゆえ細長比が十分に大きいときに、低次の振動形を実現するには、式 (1)' の L_u が L_v , L_w , L_ψ の程度に有限にとどまる必要がある。そのため

$$\sin \zeta = \zeta, \quad \cos \zeta = 1 - \frac{1}{2} \zeta^2$$

とおくと、 L_w は式 (1) あるいは (1)' と (13) から、

$$L_u = \frac{1}{2} \frac{rSl}{g} \omega^2 \left(\frac{u_0^2 + u_l^2}{2} \right) - \frac{1}{2} ES l \left(\frac{u_l - u_0}{l} \right)^2 \quad (14)$$

$$= \frac{1}{2} EI \left(\frac{\alpha}{l}\right)^3 \alpha \left(\frac{u_0^2 + u_l^2}{2} \right) - \frac{1}{2} EI \left(\frac{\alpha}{l}\right)^3 \kappa (u_l - u_0)^2 \quad (14)'$$

となる。式 (11) の L_ψ と同様に式 (14) の第2項は一様な伸びによるひずみエネルギーに相当し、第1項は運動エネルギーの項である。式 (14)' から第1項は有限であるが、第2

項のひずみエネルギーは伸び $u_l - u_0$ が有限な適当な量であれば κ とともに大きくなる。それゆえ L_n が大きくならないためには、伸び $u_l - u_0$ が十分に小さくなければならない。実際の計算例において、振動数方程式中の κ を無限大とみなして簡略化するのは、伸び $u_l - u_0$ を無限小、すなわち、伸びがなく $u_0 = u_l$ とみなすことに対応する。この極限の場合、 L_n はひずみエネルギー項が消失し

$$L_n = \frac{1}{2} \frac{rSl}{g} \omega^2 u_0^2$$

となるが、これは剛体としての変位 $u_0 \cos \omega t$ で軸方向に振動する運動エネルギーの最大値に相当する。これは軸方向の伸縮変形を無視し、軸方向への運動について棒を単に質量系とみなすことである。

5 む す び

細長比が十分に大きい場合、 $s_n \rightarrow \infty$ の極限計算により振動数方程式を簡略する近似計算法は、接続系の各部材棒を支配する3種の振動のうち、曲げ振動はそのままにし

(1) ねじり振動はばね系の振動に、

(2) 縦振動は伸縮変形を無視して単なる質量系の振動に、

みなすことに相当する。前章の記述はかならずしもこのことの直接の説明にはなっていないが、具体的な例題により確かめることは容易である。

なお、ねじり振動のばね系への変換は、細長比が大きければ、十分な精度で実用できる。これにくらべ、縦振動の質量系への変換は、伸縮変形を剛体として無視するため変位に対する制限が強く、系が特定の形状になると、細長比が十分に大きくなければ誤差が大きくなるから注意を要する。^{(1), (4)}

おわりに、貴重な御示唆と御教示をいただいた高橋伸教授に心から謝意を表します。

文 献

- (1) 高橋：機械学会論文集，27—182，1489（昭36—10）
- (2) 平野：山大紀要(工学)，9，1 179（1966）
- (3) 高橋：機械学会論文集，28—185，65（昭37—1）
機械学会論文集，29—206，1725（昭38—10）
機械学会論文集，30—212，549（昭39—4）
機械学会論文集，31—223，397（昭40—4）
- (4) 平野：機械学会論文集，31—231，1630（昭40—11）
- (5) 平野：機械学会論文集，32—239，1078（昭41—7）

On Some Model representing approximately the Vibrations of Frame Work

Yoshitaro HIRANO

Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering

In the vibrations of frame work consisting of many bars we must generally consider three kinds of displacements : torsional displacement, extensional, and flexural.

In order to solve simultaneously the equations for these displacements under the boundary conditions and the equations of continuity, we minimize the Lagrangian represented by unknown boundary constants, and, consequently, obtain the equations to decide the frequencies and the boundary constants.

If the slenderness ratio of each bar is large enough, then it is usually assumed to be infinite in the computations of those equations. And this assumption introduces some modifications of the terms referring to the torsional vibration and extensional one.

In this paper, we shall be able to find the physical meaning of the dynamical system corresponding to the vibrations of frame work under those modifications.